

文章编号: 1000-7598-(2009) 06-1631-04

各向异性初始应力状态下圆柱孔 扩张理论弹塑性分析

章定文, 刘松玉, 顾沉颖

(东南大学 交通学院, 南京 210096)

摘 要: 传统的圆柱孔扩张理论假定初始应力为各向同性的。在城市地下管道的铺设、隧道工程等的水平掘进施工过程中, 圆柱孔受到的初始竖向应力不等于初始水平应力, 并不满足各向同性初始应力条件。考虑土体的各向异性初始应力条件, 假定土体满足 Mohr-Coulomb 屈服准则, 推导了各向异性初始应力状态下的圆柱孔扩张问题弹塑性解答。算例计算结果表明: 土性参数一定时, 在相同内压力作用下, 各向异性初始应力状态下的圆柱孔扩张形成的塑性区半径大于各向同性初始应力状态下的圆柱孔扩张的塑性区半径, 但前者的极限扩孔压力小于后者。

关 键 词: 圆柱孔扩张; 各向异性初始应力; 塑性区; 极限扩孔压力

中图分类号: O 344.3

文献标识码: A

Elastoplastic analysis of cylindrical cavity expansion with anisotropic initial stress

ZHANG Ding-wen, LIU Song-yu, GU Chen-ying

(School of Transportation, Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract: Traditional cylindrical cavity expansion theory is based on the isotropic initial stress supposition. However, the cylindrical cavity is usually expanded in case of horizontal initial stress unequal to vertical initial stress, such as the horizontal directional drilling in tunnel engineering. A new elastoplastic cylindrical cavity expansion solution is introduced, in which the anisotropic initial stress is explicitly considered. Case study results indicate that the cylindrical cavity expansion with anisotropic initial stress yields a larger plastic zone than that with isotropic initial stress when the rest geometrical and geomaterial parameters are the same. The results also demonstrate that the cylindrical cavity expansion with anisotropic initial stress results in a smaller ultimate expansive pressure than that with isotropic initial stress.

Key words: cylindrical cavity expansion; anisotropic initial stress; plastic zone; ultimate expansive pressure

1 前 言

1945 年 R. F. Bishop 等提出了圆孔扩张理论解决金属压痕问题, R. E. Gibson 等 1961 年将圆孔扩张理论应用于岩土力学问题中。在以后的 40 多年中圆孔扩张理论得到了快速发展^[1-6]。圆孔扩张理论在岩土工程中已经广泛地应用于旁压试验、静力触探试验、隧道施工、井筒、沉桩等问题的应力应变分析^[3]。传统的圆柱孔扩张理论均假设初始各向应力相等(静止土压力系数 $K_0 = 1.0$), 但在实际工程中(如市政工程的地下管道铺设、隧道工程等的水平掘进施工等)圆柱孔受到的竖向应力和水平应力

并不相等。各向异性初始应力状态下的圆柱孔扩张理论可模拟城市地下管道铺设、隧道工程等的水平掘进施工过程, 可用于水平方向掘进中施工扰动分析, 孔内最大泥浆压力的确定等。H. W. Xia 等^[7]分析了满足 Mohr-Coulomb 屈服准则的纯黏性材料($\varphi = 0^\circ$)中不同 K_0 应力条件下的圆柱孔扩张问题, 并通过有限元方法验证了理论分析的合理性。本文在 Xia 等^[7]研究的基础上, 分析了黏性摩擦材料($\varphi \neq 0^\circ$)中, 各向异性初始应力条件下的圆柱孔扩张问题。其基本假设除了土体具有各向异性初始应力以外, 其他假定与 A. S. Vesic^[1]的传统圆孔扩张理论假设相同。

收稿日期: 2008-07-21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(No. 50808046); 东南大学引进人才科研启动项目(No. 9221002474)。

作者简介: 章定文, 男, 1978 年生, 博士, 讲师, 主要从事路基工程、特殊土加固等方面研究。E-mail: zhangdw@seu.edu.cn

圆柱孔在内压力 P 作用下扩张, 当内压力增加时, 圆孔半径也相应的增加。随着圆柱孔内压力的增加, 圆柱壁处土体开始屈服, 形成塑性区。随着圆柱孔内压力的进一步增加, 塑性区也随之增加, 设塑性区半径为 R_p , 相应的孔内压力值为 P_i , 在半径 R_p 以外的土体仍然保持弹性状态。

2 弹性变形阶段解

对圆柱孔在非等向的土体初始应力条件下 ($K_0 \neq 1$) 受内压力 P 作用扩张问题 (如图 1 所示), H. S. Yu^[3] 给出了该状态下圆柱孔在内压力 P 作用下弹性范围内土体中的应力分布:

$$\sigma_r = \frac{1}{2}\sigma_{v0} \left\{ (1+K_0) \left(1 - \frac{R_0^2}{R^2} \right) - (1-K_0) \left(1 - \frac{4R_0^2}{R^2} + 3\frac{R_0^4}{R^4} \right) \cos 2\theta \right\} + P_i \frac{R_0^2}{R^2} \quad (1)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}\sigma_{v0} \left\{ (1+K_0) \left(1 + \frac{R_0^2}{R^2} \right) + (1-K_0) \left(1 + 3\frac{R_0^4}{R^4} \right) \cos 2\theta \right\} \sigma_\theta - P_i \frac{R_0^2}{R^2} \quad (2)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{2}\sigma_{v0} \left\{ (1-K_0) \left(1 + \frac{2R_0^2}{R^2} - \frac{3R_0^4}{R^4} \right) \sin 2\theta \right\} \quad (3)$$

式中: σ_r 为径向应力; σ_θ 为切向应力; $\tau_{r\theta}$ 为剪应力; σ_{v0} 为初始竖向应力; R_0 为圆柱孔初始半径; P_i 为圆柱孔内压力; R 为圆柱孔半径; θ 为沿逆时针方向与水平向的夹角, 如图 1 所示。

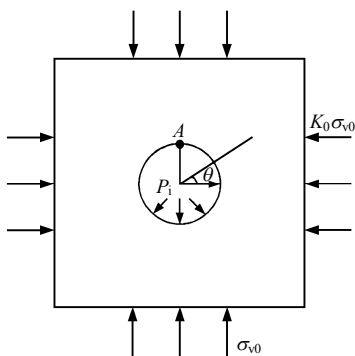


图 1 K_0 应力状态下的圆孔扩张

Fig.1 Cylindrical cavity expansion with K_0 stress state

I. D. Moore^[8]采用有限元方法分析了不同土性条件和几何条件下圆柱孔的扩张问题。计算结果表明, 当 $K_0 < 1.0$ 时, 增加内压力在圆柱孔周围形成剪切破坏时, 剪切破坏从圆柱孔的顶点开始。由式

(1) 和式 (2), 圆孔顶点 A 处 ($R = R_i$, $\theta = 90^\circ$) 的径向应力 σ_r 和切向应力 σ_θ 可以表示为

$$\sigma_r = P_i \quad (4)$$

$$\sigma_\theta = (3K_0 - 1)\sigma_{v0} - P_i \quad (5)$$

3 Mohr-Coulomb 材料的弹塑性解

Mohr-Coulomb 材料圆柱孔扩张的平衡方程为

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (6)$$

式中: r 为距圆柱孔中心的距离。

Mohr-Coulomb 屈服准则可以表示为

$$(\sigma_r - \sigma_\theta) = (\sigma_r + \sigma_\theta) \sin \varphi + 2c \cos \varphi \quad (7)$$

其中 c 、 φ 分别为土体的黏聚力和内摩擦角。

联合式 (6) 和式 (7) 得

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2 \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\sigma_r}{r} + \frac{2C \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{1}{r} = 0$$

解这个一阶线性微分方程^[3], 并利用边界条件 ($\sigma_r = P_i$ 时, $r = R_i$, R_i 为对应于内压力 P_i 的圆柱孔孔径), 得

$$\sigma_r = (P_i + c \cot \varphi) \left(\frac{R_i}{r} \right)^{\frac{2 \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}} - c \cot \varphi \quad (8)$$

式 (8) 表明, 已知圆柱孔内压力 P_i 及相应的孔径 R_i , 就可以计算塑性区的径向应力 σ_r 。得到径向应力 σ_r 以后, 联合 Mohr-Coulomb 屈服准则 (式 (7)) 可以求解环向应力 σ_θ 。

在圆孔顶 A 点的弹塑性交界处 ($R = R_p$, $\theta = 90^\circ$), 由式 (8) 有

$$\sigma_r^p = (P_i + c \cot \varphi) \left(\frac{R_i}{R_p} \right)^{\frac{2 \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}} - c \cot \varphi \quad (9)$$

在弹塑性交界处应该满足应力连续性条件, 即

$$\sigma_r^e = \sigma_r^p \quad (R = R_p, \theta = 90^\circ) \quad (10)$$

式中: σ_r^e 、 σ_r^p 分别为弹性区和塑性区的径向应力。

土体开始屈服时, 在圆孔顶的弹塑性交界处 ($R = R_p$, $\theta = 90^\circ$) 应力也应该满足屈服条件, 将式 (4) 和式 (5) 代入式 (7) 得到

$$\sigma_r^e = \frac{1}{2}(3K_0 - 1)(1 + \sin \varphi)\sigma_{v0} + c \cos \varphi \quad (11)$$

将式 (9) 和式 (11) 代入式 (10), 并化简得到

$$P_i = \left\{ \frac{1}{2}(3K_0 - 1)(1 + \sin \varphi) \sigma_{v0} + c(\cos \varphi + \cot \varphi) \right\} \left(\frac{R_p}{R_i} \right)^{\frac{2 \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}} - c \cot \varphi \quad (12)$$

由此得到了圆柱孔内压力的计算表达式。下面求解 R_p/R_i 。

在 $r = R_p$, $\theta = 90^\circ$ 处, 由弹性区径向位移表达式可得弹塑性交界处的径向位移 u_p

$$u_p = \frac{(1 + \mu)}{E} R_p (\sigma_r^e - \sigma_{v0}) = \frac{R_p (\sigma_r^e - \sigma_{v0})}{2G} \quad (13)$$

联合式 (11) 和式 (13), 有

$$u_p = \frac{R_p}{2G} \left\{ \frac{1}{2}(3K_0 - 1)(1 + \sin \varphi) \sigma_{v0} + c \cos \varphi - \sigma_{v0} \right\} \quad (14)$$

式中: G 为剪切模量, $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$; μ 为土体泊松比, 不排水条件下可取 $\mu = 0.49$; E 为土体弹性模量。

圆柱孔扩张以后体积变化等于弹性区的体积变化与塑性区体积变化之和, 即

$$\pi(R_i^2 - R_0^2) = \pi \{ R_p^2 - (R_p - u_p)^2 \} + \pi(R_p^2 - R_i^2) \Delta$$

其中, Δ 为塑性区平均体积应变。简化上式, 略去 u_p^2 项, 得

$$R_i^2 (1 + \Delta) = 2u_p R_p + R_p^2 \Delta + R_0^2 \quad (15)$$

或

$$\frac{R_i}{R_p} \sqrt{1 + \Delta} = \left(\frac{R_0^2}{R_p^2} + \frac{2u_p}{R_p} + \Delta \right)^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

当 Δ 较小时, $\sqrt{1 + \Delta} \approx 1$, 所以有

$$\frac{R_i}{R_p} = \left(\frac{R_0^2}{R_p^2} + \frac{2u_p}{R_p} + \Delta \right)^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

将弹塑性交界处的径向位移 u_p 计算式 (14) 代入式 (17), 有

$$\frac{R_i}{R_p} = \left(\frac{R_0^2}{R_p^2} + \frac{\frac{1}{2}(3K_0 - 1)(1 + \sin \varphi) \sigma_{v0}}{G} + \frac{C \cos \varphi - \sigma_{v0}}{G} + \Delta \right)^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

已知 R_p/R_i 值, 就可以确定圆柱孔内压力 P_i ,

联立式 (12) 和式 (18), 得到

$$P_i = \left\{ \frac{1}{2}(3K_0 - 1)(1 + \sin \varphi) \sigma_{v0} + c(\cos \varphi + \cot \varphi) \right\} \cdot \left\{ \frac{\frac{1}{2}(3K_0 - 1)(1 + \sin \varphi) \sigma_{v0} + c \cos \varphi - \sigma_{v0}}{G} + \frac{R_0^2}{R_p^2} + \Delta \right\}^{-\frac{\sin \varphi}{1 + \sin \varphi}} - c \cot \varphi \quad (K_0 \leq 1.0) \quad (19)$$

I. D. Moore^[8]有限元分析结果表明, 当 $K_0 > 1.0$, 内压力增加在圆柱孔周围形成剪切破坏时, 剪切破坏沿着圆柱孔的起拱线开始并发展。因此, 当 $K_0 > 1.0$ 时, 类似地可以得到计算式

$$P_i = \left\{ \frac{1}{2}(3 - K_0)(1 + \sin \varphi) \sigma_{v0} + c(\cos \varphi + \cot \varphi) \right\} \cdot \left\{ \frac{\frac{1}{2}(3 - K_0)(1 + \sin \varphi) \sigma_{v0} + c \cos \varphi - \sigma_{v0}}{G} + \frac{R_0^2}{R_p^2} + \Delta \right\}^{-\frac{\sin \varphi}{1 + \sin \varphi}} - c \cot \varphi \quad (K_0 > 1.0) \quad (20)$$

由此建立了不同 K_0 条件下, 圆柱孔内压力 P_i 与塑性区半径 R_p 的关系。上述两式中取 $K_0 = 1.0$, $\Delta = 0$, 简化为

$$P_i = \{ (1 + \sin \varphi) \sigma_{v0} + c(\cos \varphi + \cot \varphi) \} \cdot \left\{ \frac{R_0^2}{R_p^2} + \frac{\sin \varphi \sigma_{v0} + c \cos \varphi}{G} \right\}^{-\frac{\sin \varphi}{1 + \sin \varphi}} - c \cot \varphi \quad (21)$$

式 (21) 即为 G. Arends^[9]在各向等应力初始条件下 ($K_0 = 1.0$) 推导的黏性摩擦材料中圆柱孔扩张问题解答。

在式 (19) 和式 (20) 中, 平均塑性应变 Δ 是作为已知值引入的。实际上, 塑性体积应变 Δ 是塑性区内应力状态的函数, 只有应力状态为已知时, 才能确定平均塑性应变 Δ 。因此, 这两式可以采用迭代法求解。

4 算例分析

在深度 4.0 m 处有一初始半径为 0.2 m 的圆柱孔, 在内压力作用下扩张。土体重度为 20 kN/m³, 黏聚力取 20 kPa, 内摩擦角取 10°, 为简化计算, 本算例中直接取 $\Delta = 0.01$ 。上海软土的弹性模量与不排水抗剪强度的比值 (E/c_u) 一般在 150~380

之间^[10], 因此, 本算例中取 $G/c_u = 200$ 。分析不同静止土压力系数 (K_0) 条件下内压力 P_i 与塑性区半径 R_p 的关系。

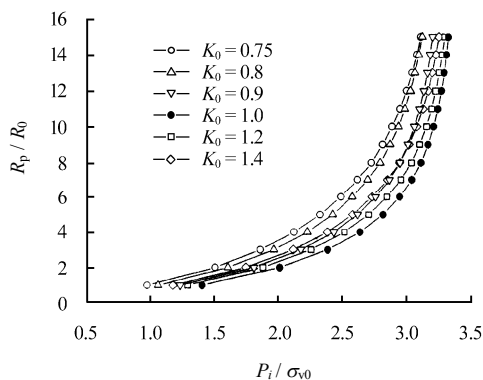


图2 塑性区半径与内压力的关系

Fig.2 Radius of plastic zone and expansive pressure

图2为不同 K_0 条件下, 塑性区半径 R_p 与内压力 P_i 的关系。由图2可见: 在相同的内压力作用下, 初始等应力条件下 ($K_0 = 1.0$) 的圆柱孔扩张形成的塑性区半径最小。无论 $K_0 < 1.0$ 还是 $K_0 > 1.0$ 时, 初始非等应力条件下的塑性区半径均大于初始等应力条件下的塑性区半径。特别是 $K_0 < 1.0$ 的情况下, 当 P_i / σ_{v0} 大于 2.0 以后, 两者的塑性区半径差异很明显。每条曲线的 P_i / σ_{v0} 的渐近值为极限扩孔压力, $K_0 = 1.0$ 时, 极限扩孔压力最大, 即传统的圆柱孔扩张理论高估了极限扩孔压力。根据以上分析可知, 将传统的初始等应力条件下圆柱孔扩张理论应用于各向异性初始应力 ($K_0 \neq 1.0$) 的工程中是偏于不安全的。

5 结 论

各向异性初始应力状态下的圆柱孔扩张理论可模拟城市地下管道铺设、隧道工程等的水平掘进施工过程, 可用于水平方向掘进中施工扰动分析, 孔内最大泥浆压力的确定等。假定土体满足 Mohr-Coulomb 屈服准则, 推导了各向异性初始应力状态下的圆柱孔扩张问题弹塑性解答。算例计算结果表明: 土性参数一定时, 在相同内压力作用下, 各向异性初始应力状态下的圆柱孔扩张形成的塑性区半径大于传统的各向同性初始应力状态下的圆柱孔扩张的塑性区半径, 但前者的极限扩孔压力小于后者。故将传统的初始等应力条件下圆柱孔扩张理论应用于各向异性初始应力条件 ($K_0 \neq 1.0$) 的工程中是偏于不安全的。

参 考 文 献

- [1] VESIC A S. Expansion of cavities in infinite soil mass[J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, 1972, 98(SM3): 265—290.
- [2] CARTER J P, BOOKER J R, YEUNG S K. Cavity expansion in cohesive frictional soils[J]. *Geotechnique*, 1986, 36(3): 349—358.
- [3] YU H S. Cavity expansion methods in Geomechanics[M]. AH Dordrecht: Kluwer Academic, 2000: 16—18.
- [4] 龚晓南, 王启铜, 罗晓. 拉压模量不同材料的圆孔扩张问题[J]. *应用力学学报*, 1994, 11(4): 127—184.
GONG Xiao-nan, WANG Qi-tong, LUO Xiao. Expansion of a circular hole in an infinite medium with different moduli in tension and compression[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 1994, 11(4): 127—184.
- [5] 蒋明镜, 沈珠江. 考虑剪胀的线性软化柱形孔扩张问题[J]. *岩石力学与工程学报*, 1997, 16(6): 550—557.
JIANG Ming-jing, SHEN Zhu-jiang. On Expansion of cylindrical cavity with linear softening and shear dilatation behaviour[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 1997, 16(6): 550—557.
- [6] 李月健, 陈云敏, 凌道盛. 土体内空穴球形扩张问题的一般解及应用[J]. *土木工程学报*, 2002, 35(1): 93—98.
LI Yue-jian, CHEN Yun-min, LING Dao-sheng. A general solution for the expansion of cavities in soil mass[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2002, 35(1): 93—98.
- [7] XIA H W, MOORE I D. Estimation of maximum mud pressure in purely cohesive material during directional drilling[J]. *Geomechanics and Geoengineering*, 2006, 1(1): 3—11.
- [8] MOORE I D. Analysis of ground fracture due to excessive mud pressure[C]//Proceedings of the 2005 No-Dig Conference. Orlando: [s. n.], 2005.
- [9] ARENDS G. Need and possibilities for a quality push within the technique of horizontal directional drilling[C]//Proceedings of the 2003 No-Dig Conference. Las Vegas: [s. n.], 2003.
- [10] 唐世栋, 何连生, 傅纵. 软土地基中单桩施工引起的超孔隙水压力[J]. *岩土力学*, 2002, 23(6): 725—730.
TANG Shi-dong, HE Lian-sheng, FU Zong. Excess pore water pressure caused by an installing pile in soft foundation[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2002, 23(6): 725—730.